数理解析研究所講究録
第 869 巻 1994 年 182-193

W-infinity 代数と非線形可積分系
(W-infinity algebras and nonlinear integrable systems)

京都大学総合人間学部　高崎　金久 (TAKASAKI Kanehisa)
東京大学数理科学研究科　武部　尚志 (TAKEBE Takashi)

要旨 : KP hierarchy など，ある種の非線形可積分系は W-infinity 代数と深く関わりあっている．非線形可積分系に付随する W-infinity 代数に注目することによって，新しい非線形可積分系を見いだしたり，様々な非線形可積分系の間の見えない関係を探り当てることができる．そのような試みを (1) KP hierarchy や Toda hierarchy の準古典極限，(2) 自己双対重力の可積分変形，(3) N-成分 KP hierarchy の Large-N 極限，の三つの話題について紹介する．

1. なぜ W-infinity 代数を考えるか？

非線形可積分系と W-infinity 代数の関係は W-infinity 代数（あるいはもっと具体的に W_∞ や w_∞）という言葉が物理学者によって導入される [1] よりも以前から実質的には知られていた [2]．それが近年急に注目されるようになったのは２次元量子重力理論の進展によるものである．実際，２次元量子重力理論，特に位相的重力・共形場理論の研究では随所に非線形可積分系の技法や W-infinity 代数の概念が生かされている [3]．逆に非線形可積分系研究の立場から見ても，２次元量子重力理論は新たな研究材料の宝庫なのである．

W-infinity 代数は非線形可積分系において基本的には Kac-Moody 代数と同じ役割を果たす [4]．ただ，関与する方程式のタイプは異なる．既知の非線形可積分系の大部分を占めるのはソリトン現象を記述する方程式（ソリトン方程式）である．その中でも特に１＋１次元の方程式（代表的なものとして KdV，非線形 Schrödinger, sine-Gordon, principal chiral field, などの方程式がある）はそれぞれ固有の Kac-Moody 代数を伴っていて，この Kac-Moody 代数によって方程式の基本的構造が規定されている．これに対して KP hierarchy のようなタイプのソリトン方程式はより普遍的なもので，Kac-Moody 代数に対応するいろいろなソリトン方程式を特殊化（reduction）として含んでいる．W-infinity 代数はこれらの普遍的なソリトン方程式に現れるのである．

さらに W-infinity 代数は自己双対重力（真空中の自己双対 Einstein 方程式）にも現れる [5]．自己双対重力は，自己双対 Yang-Mills 方程式と同様，高次元（４次元または２＋２次元）の非線形可積分系と

して知られている．その可積分性は従来，ソリトン方程式とはかなり異なる枠組（twistor 理論）の中で理解されてきた．また，そのことを反映して，W-infinity 代数自体も KP hierarchy に現れるもの（W_∞ 代数）とは異質のもの（w_∞ 代数）である．しかしながら，とにかく W-infinity 代数という共通言語のおかげで自己双対重力とソリトン方程式を比較研究できるのである [6]．しかも面白いことに，自己双対重力は4次元の $N=2$ 超弦理論の物理的状態の運動方程式としても現れる [7]．その意味で2次元量子重力とも（間接的にではあれ）ある意味で関係している．

このように，W-infinity 代数という視点からさまざまな非線形可積分系を眺めると，Kac-Moody 代数とはまた一味違った世界が見えてくる．上に述べた例が示すように，W-infinity 代数に関係するのはなんらかの意味で普遍的な，あるいは高次元的な非線形可積分系である．そのような方程式は今のところごく小数しか知られていないが，工夫次第でいろいろ新しいものを見つけられるのではないかと思う．例えば，既知の方程式に付随する W-infinity 代数を適当に "変形" することによって別の方程式を導き出すことができれば，それが新しい可積分系になるかも知れない．あるいはまた，既知の方程式の間の新たな関係を同様にして見いだせるかも知れない．この論文ではそのような試みをいくつか紹介する．

2. KP/Toda hierarchy の準古典極限

ここでは KP hierarchy に話を絞るが，基本的に同じことが Toda hierarchy についてもいえる．

KP hierarchy の定式化は通常 Lax 形式と呼ばれるものから出発する．Lax 形式とは非線形方程式系を量子力学の Heisenberg の運動方程式によく似た形に書き直したもので，通常は Planck 定数を1におくのだが，準古典極限を考えるにはむしろ Planck 定数をあらわに残しておく方が都合がよい．そのような定式化では KP hierarchy の Lax 形式はつぎのようになる．

$$\hbar\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L], \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

ここで L, B_n は1変数 x に関する次のような（形式的）擬微分作用素ならびに微分作用素である．

$$\begin{aligned} L &= \hbar\partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}(\hbar, x, t)\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-n}, \\ B_n &= (L^n)_{\geq 0}, \end{aligned} \tag{2}$$

["$(\quad)_{\geq 0}$" は $\partial_x = \partial/\partial x$ の非負巾部分への射影をあらわす]．x は t_1 と同一視してもよい．

ここでさらに L の係数達が $\hbar \to 0$ において滑らかな極限をもつ

$$u_n(\hbar, x, t) = u^{(0)}(x, t) + O(\hbar) \quad (\hbar \to 0) \tag{3}$$

と仮定する．このとき新たな変数 k を導入して（形式的） Laurent 級数

$$\mathcal{L} = k + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}^{(0)}(x, t)k^{-n} \tag{4}$$

ならびに多項式

$$\mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0} \tag{5}$$

[“( )$_{\geq 0}$” はここでは k の非負巾部分への射影をあらわす] をつくると，上の Lax 方程式系からの帰結として準古典的 Lax 方程式系

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

が導かれる．ここで “{ , }” は (k, x) に関する Poisson 括弧

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial k} \tag{7}$$

である．こうして得られる準古典的 Lax 方程式系は無分散 KP hierarchy と呼ばれる [8]．

通常の量子力学と古典力学の対応を思い出せば，上のように KP hierarchy の Lax 方程式系から準古典的 Lax 方程式系が出てくることは直ちに納得されるだろう．量子力学での正準共役対 $(\hbar\partial_x, x)$ からなる observable の交換子は古典力学の正準共役対 (k, x) からなる observable（つまり２次元相空間上の函数）の Poisson 括弧に

$$[\hbar\partial_x, x] = \hbar \ \longrightarrow \ \{k, x\} = 1 \tag{8}$$

という基本関係によって対応する．Lax 方程式の交換子が $\hbar \to 0$ の極限で Poisson 括弧に化けることはこのことによっている．W-infinity 代数の言葉で言えば，ここで量子論的 W-infinity 代数 W_∞ から古典論的 W-infinity 代数 w_∞ への“縮約”が起きているのである．今の場合 W_∞ は擬微分作用素によって実現されている：

$$W_\infty \simeq \left\langle x^\ell (\hbar\partial_x)^n \right\rangle \tag{9}$$

これをいわゆる“スペクトルパラメータ” λ についての Fourier mode で見れば，Laurent 級数係数の微分作用素による実現になる：

$$W_\infty \simeq \left\langle \lambda^n (\hbar\partial_\lambda)^\ell \right\rangle \tag{10}$$

準古典極限においてこれは Poisson 代数へと移行する：

$$w_\infty \simeq \left\langle \lambda^n \mu^\ell \right\rangle, \quad \{\lambda, \mu\} = 1. \tag{11}$$

ここに現れた (λ, μ) は前述の (k, x) とは別のもので，実は $\mathcal{L}$ とその正準共役変数 $\mathcal{M}$ に相当する．$\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = \sum_{n=2}^{\infty} n t_n \mathcal{L}^{n-1} + x + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1}^{(0)}(x, t)\mathcal{L}^{-n-1} \tag{12}$$

という形の Laurent 展開をもち，準古典的 Lax 方程式系

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

ならびに正準共役条件

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = 1 \tag{14}$$

を満たすものとして定義される.(KP hierarchy 自体においてもこの $\mathcal{M}$ に相当するものがあり，そこからこれらの方程式を引き出すこともできる.) この正準共役対 $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ を用いることで，無分散 KP hierarchy の twistor 理論をつくることができる [9]. それは自己双対重力の twistor 理論とよく似ているが，その場合の twistor 空間が複素3次元であるのに対して，今は 複素2次元の "minitwistor" 空間と呼ばれるものが現れる. このように非線形可積分系の立場から突き詰めて行くと，twistor 理論の本質は実は面積保存微分同型または正準変換のなす群（その Lie 代数が w_∞ である）におけるある種の factorization (Riemann-Hilbert 問題) にあることがわかる [6]. こうして無分散 KP hierarchy を仲介として KP hierarchy と自己双対重力が比較可能になるわけである.

しかしながら，きちんと比較してみると，実は無分散 KP hierarchy に現れる W-infinity 代数と自己双対重力に現れる W-infinity 代数は全く異質のものであることもわかる. 実際自己双対重力では，次節でも触れるように，ある意味で前述の正準共役対 (λ, μ) のうちの λ（つまり通常のスペクトルパラメータ）だけが残り，その代わりに別の正準共役変数対 (p, q) に関する古典論的 W-infinity 代数

$$w^\infty \simeq \left\langle p^\alpha q^\beta \right\rangle, \quad \{p, q\} = 1 \tag{15}$$

が現れる.（前述の w_∞ と区別するため添字の "∞" を上に付けた. その意図は後で明らかになる.）そして λ をループ変数にする w^∞ のループ代数

$$\mathcal{L}w^\infty = \mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \otimes w^\infty = \left\langle \lambda^n p^\alpha q^\beta \right\rangle \tag{16}$$

が理論を特徴付ける Lie 代数になる.

3. 自己双対重力の Moyal 代数による可積分変形

自己双対重力の可積分性を論じるには，局所的表現として Monge-Ampère 型の方程式（物理学者は Plebanski 方程式と呼ぶ）

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial p \partial \hat{p}} \frac{\partial^2\Omega}{\partial q \partial \hat{q}} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial p \partial \hat{q}} \frac{\partial^2\Omega}{\partial q \partial \hat{p}} = 1 \tag{17}$$

を用いるのが便利である. ここに Ω は Kähler potential に相当する未知函数である. この方程式は (p, q) に関する Poisson 括弧

$$\{A, B\} = \{A, B\}_{p,q} = \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} \tag{18}$$

を用いて

$$\{\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{p}}, \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{q}}\} = 1 \tag{19}$$

と書くことができる. [$(\hat{p}, \hat{q})$ に関する Poisson 括弧でも同様な表現が得られるが，今は上の表現を考える.] ここにおいてすでに前述の w^∞ の構造が見えていることに注意されたい.

さらに，前述のようにスペクトルパラメータ λ を導入すればこの場合の Lax 方程式系に相当する微分方程式系

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \hat{p}} + \lambda\{\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{p}}, \mathcal{U}\} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \hat{q}} + \lambda\{\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{q}}, \mathcal{U}\} = 0,\\
&\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \hat{p}} + \lambda\{\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{p}}, \mathcal{V}\} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \hat{q}} + \lambda\{\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{q}}, \mathcal{V}\} = 0,\\
&\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} = 1.
\end{aligned} \tag{20}
$$

（$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ は $(p, q, \hat{p}, \hat{q}, \lambda)$ の函数）が得られる．この方程式と無分散 KP hierarchy の $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ に対する方程式がよく似た構造をもつことに注意されたい．この方程式によって補助変数を定義すると 自己双対重力の twistor 理論を factorization の形式に翻訳することができるのである．無分散 KP hierarchy との大きな違いは，ここでは正準共役変数以外に λ というループ変数が現れていることである．前述のループ代数 $\mathcal{L}w^\infty$ はここに由来する．

次に，このループ代数を “ 量子変形 ” することを考える．ここで KP hierarchy と無分散 KP hierarchy の関係

$$
\left\{\begin{matrix}\text{KP hierarchy}\\ W_\infty\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\hbar\to 0]{} \left\{\begin{matrix}\text{無分散 KP hierarchy}\\ w_\infty\end{matrix}\right\} \tag{21}
$$

を思い出して欲しい．他方，すでに注意したように，無分散 KP hierarchy と 自己双対重力は大変よく似ている．これらのことを考え合わせると，

$$
\left\{\begin{matrix}?\\ \mathcal{L}W^\infty\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\hbar\to 0]{} \left\{\begin{matrix}\text{自己双対重力}\\ \mathcal{L}w^\infty\end{matrix}\right\} \tag{22}
$$

という関係で自己双対重力と結ばれる方程式があるのではないか？と思われてくる．ここで W^∞ は w^∞ からの変形として得られるなんらかの量子論的 W-infinity 代数である．

この “?” の位置に入るべき方程式がすでに見いだされている [10]．これは (p, q) に関する Poisson 括弧 $\{\ \ ,\ \ \}$ を Moyal 括弧

$$
\{A, B\}_\hbar = \frac{2}{\hbar}(A * B - B * A) \tag{23}
$$

でおきかえたもの

$$
\left\{\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{p}}, \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{q}}\right\}_\hbar = 1 \tag{24}
$$

である．ただしここで $A * B$ は star 積

$$
A * B = \exp\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p \partial q'} - \frac{\partial^2}{\partial p' \partial q}\right)\right] A(p, q) B(p', q')\Big|_{p'=p, q'=q} \tag{25}
$$

である．この star 積 は幾何学的量子化の理論では昔から知られていたもので [11]，その実体は Weyl 順序で書いた量子力学の observable（あるいは微分作用素）の合成規則に他ならない．従って非可換で結合的な積を定義するし，その交換子は量子論的 W-infinity 代数の一つの実現を与える．我々が W^∞ の実現として選ぶのはこの代数である：

$$
W^\infty \simeq \left\langle p^\alpha q^\beta \right\rangle, \quad \{p, q\}_\hbar = 1. \tag{26}
$$

この場合の Lax 方程式に相当するのは方程式 (20) において Poisson 括弧を Moyal 括弧に置き換えたものである．そしてそのことに基づいて Moyal 代数変形された Plebanski 方程式の可積分性を示すことができる [12]．

同様の可積分系は任意偶数次元の Poisson 括弧からもつくれる．(Plebanski 方程式にあたるものは連立系になる.) そのようにして得られるのは自己双対重力の一種の高次元（4 の倍数次元）版で，幾何学的には hyper-Kähler 幾何学と呼ばれるものに他ならない．Moyal 括弧も任意偶数次元で定義できて，それを用いれば 4 の倍数次元の Plebanski 方程式に対する可積分変形が得られる．

ところで無分散 KP hierarchy には (λ, μ) あるいは (k, x) という変数があり，他方，自己双対重力には (λ, p, q) という変数がある.(それぞれの twistor 理論を比較すると [6]，自己双対重力では $\lambda = \mathcal{L} = k$ と考えてよいことがわかる.) それならば (k, x, p, q) と言う 4 つの変数を全部含む理論はつくれないだろうか？もしもそれがつくれるのならば，今まで議論した可積分系を全部特殊化として含むような最も普遍的な可積分系になるはずである．次節ではこの問題を考える．

4. N–成分 KP hierarchy の Large-N 極限

KP hierarchy や無分散 KP hierarchy に (p, q) という変数を取り込むために large-N limit の考え方を利用する．その基本的なアイディアは $\mathrm{sl}(N)$ や $\mathrm{gl}(N)$ が $n \to \infty$ の極限において W-infinity 代数に化ける，

$$\mathrm{sl}(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} W^{\infty}, w^{\infty} \tag{27}$$

という主張に基づく [13]．(W^{∞} と w^{∞} のいずれが現れるかは極限移行の際のパラメータの調節の仕方によって違ってくる.) $\mathrm{sl}(N)$ の代わりに $\mathrm{gl}(N)$ を考えると central element が付け加わるだけのことだから，

$$\mathrm{gl}(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Moyal}(M), \mathrm{Poisson}(M)$$

($\dim M = 2$) ということになる.(定数函数の部分が central element にちょうど対応する.) 従って，もしも考えている系が $\mathrm{sl}(N)$ 対称性をもつならば large-N limit によって余分の 2 個の次元を生成することができる可能性がある．実際，そのようにして 4 次元の自己双対重力を 2 次元の $\mathrm{sl}(N)$ 対称な非線形 σ 模型（ Wess-Zumino-Witten 項のみからなる Lagrangian をもつ）の large-N limit として導き出せることが指摘されている [14]．

同じアイディアを KP hierarchy に適用すれば高次元化が得られるだろうと期待される．そのため $\mathrm{sl}(N)$ または $\mathrm{gl}(N)$ の内部対称性をもつ KP hierarchy が必要である．そのような KP hierarchy は実は “N-成分 KP hierarchy” としてすでに知られている [15]．これは KP hierarchy の理論に現れる様々な擬微分作用素を $N \times N$ 行列係数のものに置き換えたものと思ってよい．KP hierarchy の理論においては Lax 作用素よりも基本的なものとして dressing 作用素 と呼ばれるものがある．それは $\hbar = 1$ の通常の定式化では

$$W = 1 + w(x,t)\partial_x^{-1} + w_2(x,t)\partial_x^{-2} + \cdots \tag{28}$$

という形をしていて Lax 作用素と

$$L = W\partial_x W^{-1} \tag{29}$$

という関係で結ばれ，それ自体は

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = \left(W\partial^n W^{-1}\right)_{\geq 0} W - W\partial_x^n, \quad n = 2, 2, \ldots \tag{30}$$

という方程式で時間発展する．N-成分 KP hierarchy では係数 w_n 達が $N \times N$ 行列になるというわけである．このような N-成分 hierarchy に対応する W-infinity 代数は W_∞^N 代数と呼ばれるものになる [16] [17]．(その他にも時間変数の入れ方が t_n よりも細かくなる，複数個の Lax 作用素が必要になる，などいろいろ違いが出てくるが，いまはこれ以上の詳細に立ち入らない．)

W_∞^N の large-N 極限もすでに議論されていて [16]，4次元の Poisson 代数 Poisson(M), $\dim M = 4$, が極限として現れることが指摘されている．極限移行のパラメータを調節すれば Moyal 代数 Moyal(M) も得られると思ってよいだろう．この2種類の large-N limit をそれぞれ w_∞^∞, W_∞^∞ と書くならば，

$$W_\infty^\infty \simeq \mathrm{Moyal}(M), \quad w_\infty^\infty \simeq \mathrm{Poisson}(M), \tag{31}$$

という図式が得られる．あるいは具体的に生成系を与えれば

$$W_\infty^\infty \simeq \left\langle p^\alpha q^\beta x^\ell \partial_x^n \right\rangle, \quad w_\infty^\infty \simeq \left\langle p^\alpha q^\beta x^\ell k^n \right\rangle, \tag{32}$$

ただし，前者は Moyal 代数係数の擬微分作用素としての交換子によって，また後者は (k, x, p, q) を4次元の正準座標系とみなして

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial k} + \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} \tag{33}$$

という Poisson 括弧で Lie 代数の構造を入れている．自己双対重力に現れるループ代数 $\mathcal{L}W^\infty$, $\mathcal{L}w^\infty$ は (32) の表示ではで x を含まない生成元のつくる部分代数と同一視できる．また，それらを sl(N) ないし gl(N) のループ代数の large-N とみなすこともできる：

$$\mathcal{L}sl(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}W^\infty,\ \mathcal{L}w^\infty. \tag{34}$$

これがまさしく2次元の可積分系から4次元の自己双対重力を引き出すことに相当する．ここに現れる W-infinity 代数を W^∞, w^∞ というように書いて W_∞, w_∞ と区別している理由もいまや明らかであろう．

こうして我々の求めていた4個の正準変数 (k, x, p, q) あるいはその量子力学版 (∂_x, x, p, q) が W_∞^N の large-N limit に伴って自然に現れてくることがわかった．対応する hierarchy の構成の手掛かりもすでに上の考察の中に見えている．つまり，KP hierarchy のレベルで言えばスカラーまたは行列係数の擬微分作用素の代わりに Moyal 代数係数の擬微分作用素を考えればよいのである [18]．例えば dressing operator としては

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\hbar, t, x, p, q)\partial_x^{-n} \tag{35}$$

というものをとり，係数 ($\hbar, t, x, p, q$ のスカラー値函数) の代数的演算 (和および積) は Moyal 代数 (正確には star 積代数) の意味で考える．Lax 作用素についても同様である．従って一見本来の KP hierarchy

と同じに見えるが，係数は非可換な量である．さらに，KP hierarchy の場合と同様の準古典極限の処法（$\partial_x \to \hbar\partial_x$, $\partial_t \to \hbar\partial_t$ の置き換えを施す）により，(k, x, p, q) の Poisson 代数に基づく hierarchy（無分散 KP hierarchy の高次元化）が得られる．明らかに，この hierarchy の構成はそのまま一般次元の Moyal 代数や Poisson 代数に拡張できる．

実際には，N-成分 KP hierarchy においてすでにそうであったように，時間変数（flow）の入れ方や Lax 作用素の用意の仕方なども 1 成分 KP hierarchy の場合とは違ってくる．具体的な説明は省くが，面白いことに，hierarchy を構成する flow の選び方には少なくとも次の二種類が可能である：

1) KP hierarchy と同様の可換な flow の組

2) ある種の非可換な flow の組

前者は通常のソリトン理論の flow の拡張であるが，後者は以下に述べる constraint のもとで自己双対重力の Moyal 代数変形に帰着する．つまり，自己双対重力における 2 個の flow（変数 $\hat{p}$, $\hat{q}$ を "時間変数" とするは）実は非可換なのである.（もっともこれは例えてみれば Heisenberg 代数のような非可換性で，ほとんど可換と言ってもよいものではある.）

自己双対重力の Moyal 代数変形に対応する解は

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

という constraint で特徴づけられる．このときには W において $\partial_x \to \lambda$ という置き換えを行って

$$W(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \lambda^{-n} \tag{37}$$

という Laurent 級数をつくり，それを使って理論を再構成できる．これは N-成分 KP hierarchy の理論でもよく知られたことで，その場合には非線形 Schrödinger 方程式などを含む AKNS-ZS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur-Zakharov-Shabat) 理論の拡張が得られる．対応する Lie 代数がすでに現れた $\mathcal{L}sl(N)$ などのループ代数（Kac-Moody 代数）に他ならない．すでに注意したように，その large-N limit が $\mathcal{L}w_\infty$ や $\mathcal{L}w_\infty$ を与えるのであるから，自己双対重力はある意味で AKNS-ZS 理論の large-N limit と見なせるわけである．こうして 2 次元の可積分系から large-N limit によって自己双対重力を導出することができる．ただしうるさく言えば flow としてはもとのソリトン方程式系とは違うもの（前述のように非可換）を選び直さなければならない．

5. まとめ

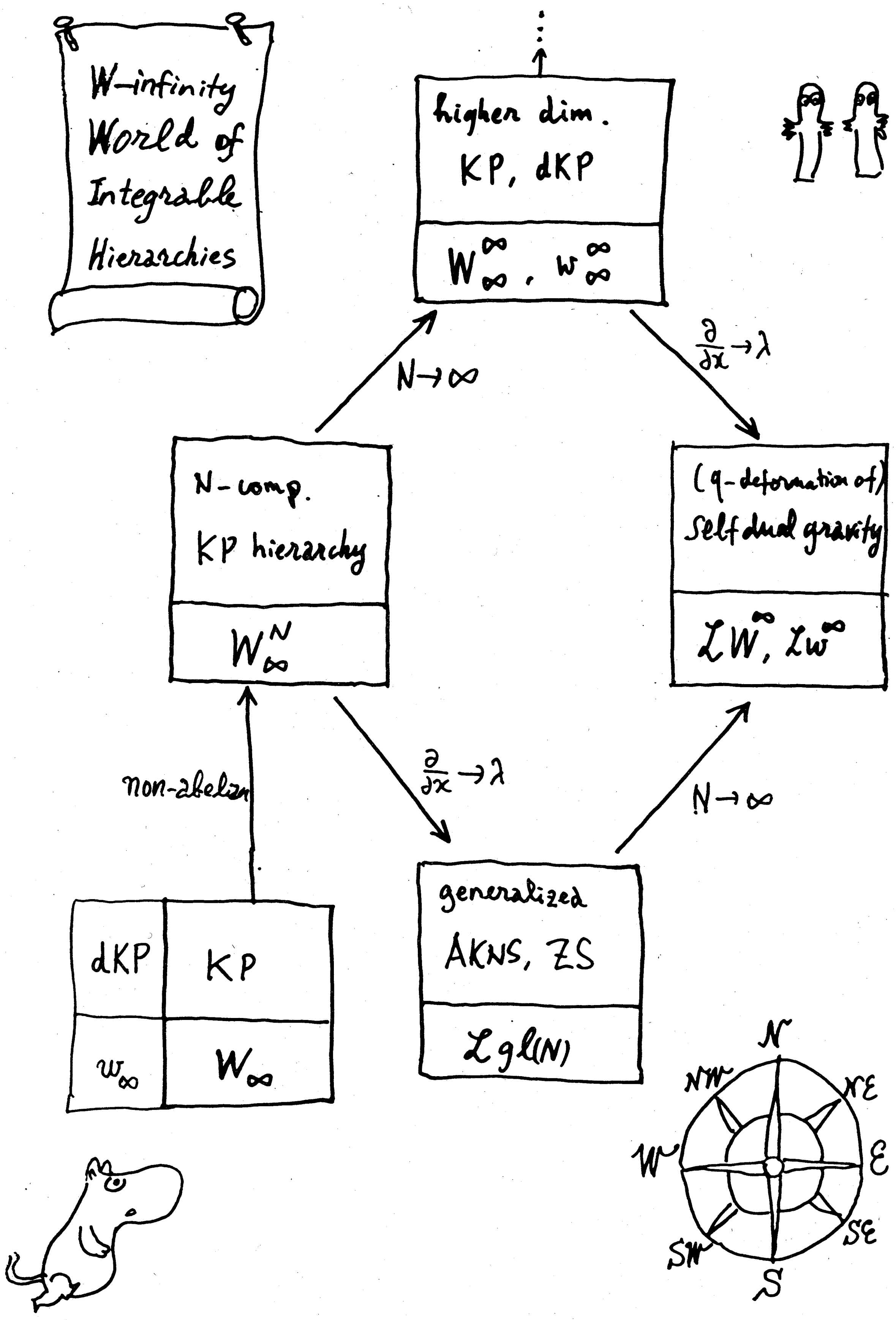
この論文では W-infinity 代数の視点からある種の非線形可積分系を系統的に取り扱う試みを紹介した．そのような方程式はそれぞれ固有の W-inifinity 代数を伴っている．これらの W-infinity 代数を比較したり，変形などの操作によって別の W-infinity 代数に置き換えてみることによって，さまざまな方程式の間の関係を明らかにすることができる．またそれによって新しい方程式を見いだせる場合もある．そのためのいくつかの技法を見てきた．

これまでに扱ったいくつかの方程式（ならびに対応する W-infinity 代数）の位置関係は次ページのような図にまとめてみるとわかりやすいのでないかと思う．この図の出発点には KP hierarchy とその無分散極限（dispersionless KP hierarchy）がある．KP hierarchy を多成分化することによって，W-infinity 代数も W_∞ から W_∞^N に拡張される．ここで x-依存性を落として $\partial_x \to \lambda$ という置き換えを行えば AKNS-ZS 理論（それは $1+1$ 次元ソリトン方程式の一族を与える）になり，W_∞^N は $\mathcal{L}sl(N)$ などの Kac-Moody 代数に縮小される．ここで large-N limit をとれば（実は flow のタイプが違うので，それも取り替えねばならないのだが），自己双対重力とその Moyal 代数的変形を得る．対応する W-infinity 代数は $\mathcal{L}W^\infty$ や $\mathcal{L}w^\infty$ である．他方，N-成分 KP hierarchy において先に large-N limit をとれば高次元化された KP hierarchy に到達する．その W-infinity 代数は W_∞^∞ や w_∞^∞ である．ここから x-依存性を落として $\partial_x \to \lambda$ という置き換えを行えば再び自己双対重力とその Moyal 代数的変形に到る．

さらに，本文中では省いたが，高次元化された KP hierarchy の N-成分理論を考えることもできる．そのためには dressing operator の係数を Moyal 代数の行列要素をもつ $N \times N$ 行列に置き換えればよい．対応する W-infinity 代数は “$W_\infty^{\infty,N}$” と呼ぶべきものである．そこから x 以外の空間変数への依存性を落とせばもとの N-成分 KP hierarchy に戻る．また別の reduction（具体的な手順は省く）を行うと，自己双対 Yang-Mills 方程式や Bogomolny hierarchy（自己双対 Yang-Mills 方程式の $2+1$ 次元への reduction に関係する）などの高次元可積分系を引き出すこともできる．このように，この図の最上段に位置する hierarchy は既存のソリトン方程式と高次元可積分系のいわば “統一理論” を与えるものであることがわかる．

今のところこの “統一理論” を与える 高次元化 された KP hierarchy がどのような物理的応用をもつのかまだよくわからない．一つの可能性として，ソリトン方程式と自己双対重力がともに自然な形で含まれているので，2次元量子重力理論と4次元の $N=2$ 超弦理論とを直接につなぐ手掛かりとなるかも知れない．また別の可能性として，位相的共形場理論や弦理論，特に A 型以外の Landau-Ginzburg 模型 [19] への応用があるかも知れない．なぜなら，A 型 Landau-Ginzburg 模型は1個の Landau-Ginzburg 場しか含まず，それがちょうど無分散 KP hierarchy の変数 k に対応しているのだが，A 型以外では2個以上の場が現れるからである．それを高次元化 hierarchy の $k, p, \ldots$ と解釈して扱えると面白いと思う．このような応用例は（本当につくれるならば）大変貴重である．特に，τ 函数の概念をこの hierarchy に対してどのように定義したらよいか（現在のところ不明）という問題に対して，そこから何らかの手掛かりを得ることができるだろう．

（１９９３年2月）


W-infinity
World of
Integrable
Hierarchies
higher dim.
KP, dKP
W_∞^∞, w_∞^∞
$N\to\infty$
$\frac{\partial}{\partial x}\to\lambda$
N-comp.
KP hierarchy
W_∞^N
(q-deformation of)
self dual gravity
$\mathcal{L}W^\infty$, $\mathcal{L}w^\infty$
non-abelian
$\frac{\partial}{\partial x}\to\lambda$
$N\to\infty$
dKP
KP
w_∞
W_∞
generalized
AKNS, ZS
$\mathcal{L}gl(N)$
N
NW
NE
W
E
SW
SE
S

REFERENCES

1. Bakas, I., Commun. Math. Phys. 134 (1990), 487-508.
   Pope, C.N., Romans, L.J., and Shen, X., Phys. Lett. 236B (1990), 173-178.
   Pope, C.N., Romans, L.J., and Shen, X., Phys. Lett. 245B (1990), 72-78.
2. Sato, M., and Sato, Y., in: *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Sciences* , U.S.-Japan seminar, Tokyo 1982 (North-Holland, Amsterdam, and Kinokuniya, Tokyo, 1982).
   Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., and Miwa, T., in: *Nonlinear Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory,* Kyoto 1981 (World Scientific, Singapore, 1983).
   Orlov, A.Yu., in: *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1988).
3. Dijkgraaf, R., Verlinde, H., and Verlinde, E., Notes on topological string theory and 2d quantum gravity, PUPT-1217, IASSNS-HEP-90/80 (November, 1990).
   Dijkgraaf, R., Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory, IASSNS-HEP-91/91 (December, 1991).
4. Kac, V.G., Infinite dimensional Lie algebras, 2nd ed. (Cambridge Univ. Press, 1985).
5. Boyer, C.P., and Plebanski, J.F., J. Math. Phys. 26 (1985), 229-234.
   Takasaki, K., J. Math. Phys. 31 (1990), 1877-1888.
   Park, Q-Han, Phys. Lett. 236B (1990), 429-432.
6. Takasaki, K., in: *Topological and geometrical methods in field theory*, Turku, Finland, May 26 - June 1, 1991 (World Scientific, Singapore, 1992).
7. Ooguri, H., and Vafa, C., Nucl. Phys. B361 (1991), 469-518.
8. Lebedev, D., and Manin, Yu., Phys.Lett. 74A (1979), 154–156.
   Zakharov, V.E., in: *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Lecture Notes in Phys. Vol. 153 (Splinger-Verlag, 1982).
   Kodama, Y., Phys. Lett. 129A (1988), 223-226.
   Kodama, Y., and Gibbons, J., Phys. Lett. 135A (1989), 167-170.
9. Takasaki, K., and Takebe, T., in: *Infinite Analysis*, Int. J. Mod. Phys. A7, Suppl. 1B (World Scientific, Singapore, 1992).
10. Strachan, I.A.B., Phys. Lett. B282 (1992), 63-66.
11. Bayen, F., Flato, M., Fronstal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., Ann. Phys. (N.Y.) 111 (1978), 61; Ann. Phys. (N.Y.) 111 (1978), 111.
    Arveson, W., Commun. Math. Phys. Phys. 89 (1983), 77-102.

12. Takasaki, K., Dressing operator approach to Moyal algebraic deformation of selfdual gravity, Kyoto preprint KUCP-0054/92 (December, 1992).

13. Hoppe, J., Ph.D. thesis (MIT, 1982); 素粒子論研究 80 (3) (1989), 145-202.
Fairlie, D.B., and Zachos, C.K., Phys. Lett. 224B (1989), 101-107.
Pope, C.N., and Stelle, K.S., Phys. Lett. 226B (1989), 257-263.
Hoppe, J., Int. J. Mod. Phys. A 4 (19) (1989), 5235-5248.

14. Park, Q-Han, Phys. Lett. 238B (1990), 287-290; Int. J. Mod. Phys. A7 (1992), 1415-1448.

15. Sato, Y., and Sato, Y., in Ref. 2.
Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., and Miwa, T., J. Phys. Soc. Japan 50 (1982), 3806-3812.

16. Bakas, I., and Kiritsis, E., Mod. Phys. Lett. A5 (1990), 2039-2050.

17. Odake, S., and Sano, T., Phys. Lett. B258 (1991), 369-374.

18. Takasaki, K., Nonabelian KP hierarchy with Moyal algebraic coefficients, in preparation.

19. Dijkgraaf, R., Verlinde, H., and Verlinde, E., Nucl. Phys. B352 (1991), 59-86.